Sistemas de control

Índice

Bibliografía

- Tecnología Industrial 2. Germán Cabrales, Nieves Jiménez y otros. Editorial Santillana.

- Tecnología Industrial II. Sonia Val, José Luis Huertas y otros. Editorial McGraw-Hill

- Sistemas de control electrónico. W. Bolton. Editorial Marcombo.

- Sistemas de control secuencial. Florencio Cembranos Nistal. Editorial Paraninfo.

38. Sistemas de control

Podemos definir un **sistema** como un conjunto de componentes físicos, unidos o relacionados de tal manera que forman y/o actúan como una unidad completa.

Por **control** se entiende el conjunto de acciones emprendidas para dar a un proceso la evolución deseada. La palabra **controlar** es sinónimo de, gobernar, mandar, dirigir o regular.

Combinando las definiciones anteriores, establecemos: "Un **sistema de control** es un ordenamiento de componentes físicos unidos o relacionados de tal manera que mandan, dirigen o regulan al mismo sistema o a otro".

La figura 38.1 representa uno de los posibles esquemas de bloques de un sistema de control genérico y simple, en lazo cerrado, con una sola entrada y una sola salida, para un sistema con señales continuas. Las flechas de un lazo cerrado, que conectan un bloque con otro, representan la dirección del flujo de la energía de control o información, que a menudo no es la fuente principal de energía para el sistema.

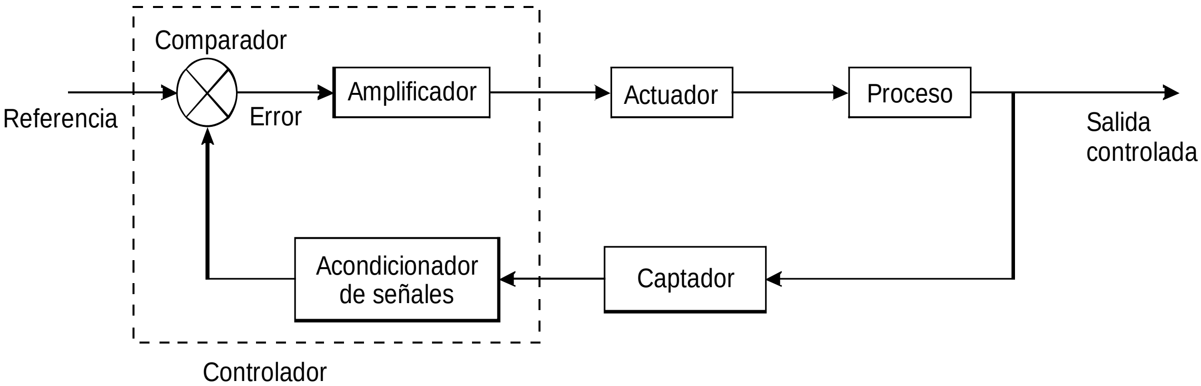

Figura 38.1. Esquema de bloques de un sistema de control.

Los **elementos** del sistema de control más importantes son los siguientes:

- **Proceso**: Conjunto de operaciones que se van a suceder y que van a tener un fin determinado. El procesamiento se realiza sobre una **planta** o una **máquina**.

- Actuador: Como el nombre indica es el componente encargado de actuar sobre el proceso o máquina en función de la señal recibida del amplificador. El actuador modifica la variable de entrada del proceso controlado, por ejemplo, una corriente eléctrica que circula por la resistencia del radiador, en un sistema de control de temperatura; una corriente de fluido por una tubería, en un sistema de control de caudal; etc.

- **Amplificador**: Elemento que aumenta la amplitud o intensidad de una señal. Tiene por finalidad amplificar la señal de error o señal activa, con objeto de que alcance un nivel suficiente para excitar el actuador.

- **Comparador**: Elemento que compara la señal controlada con la señal de referencia para proporcionar la señal de error. El resultado de la comparación representa la desviación de la salida con respecto al valor previsto. Se le conoce también como detector de error.

- Generador del valor de referencia o consigna: Componente capaz de generar una señal análoga a la señal de salida que se quiere gobernar; esta señal de referencia es la encargada de imponer el valor deseado en la salida.

-Captador: Dispositivo que transforma un tipo de energía en otro más apto para su utilización, en general, energía eléctrica; también se llama **sensor**. Es el dispositivo encargado de detectar la señal de salida para utilizarla de nuevo en el proceso de realimentación.

- Acondicionador de señales: Bloque que adapta la señal transformada por el captador a los niveles adecuados del comparador.

- Controlador: Elemento de los sistemas digitales que incluye las funciones del comparador, el amplificador y el acondicionador de señales.

En el análisis de los sistemas de control, cada uno de sus componentes analizados en el apartado anterior, constituyen sistemas físicos individuales caracterizados por tener una entrada y una salida variables con el tiempo. Para determinar la relación entre entrada y salida de cada subsistema es necesario aplicar las leyes físicas que rigen su funcionamiento.

Las **señales** más significativas del sistema de control son:

- **Señal de referencia**: Señal que se calibra en función del valor deseado a la salida del sistema.

- **Señal controlada**: La **salida controlada** es la variable de salida del proceso, bajo el mando del sistema de control con retroalimentación.

- **Señal activa**: Se denomina así a la señal de error que es la diferencia entre la señal de referencia y la señal realimentada.

- **Perturbaciones**: Señales indeseadas que intervienen de forma adversa en el funcionamiento del sistema.

- **Señal de control** (o **variable manipulada**) es la señal de salida de los actuadores, aplicada como entrada en la planta.

38.1 Modelos matemáticos: función de transferencia, transformada de Laplace, ecuación característica

Para estudiar el comportamiento de los sistemas se utilizan modelos matemáticos que se representan por ecuaciones, las cuales describen las relaciones entre la entrada y la salida de un sistema y que también sirven para predecir el comportamiento de un sistema en condiciones específicas. Las bases de estos modelos se obtienen de leyes físicas fundamentales que rigen el comportamiento de un sistema.

Pero no solamente se está interesado en qué salida se obtendrá con una determinada entrada después de que se alcanza un estado estacionario (régimen permanente), también es necesario considerar cómo la salida varía con el tiempo cuando la entrada cambia con el tiempo.

38.1.1 Función de transferencia

La función de transferencia es **una expresión que relaciona la salida y la entrada de un sistema** en términos de parámetros del mismo, y es una propiedad del sistema en sí, independiente de la función de entrada. Se expresa como cociente entre la señal de salida y la señal de entrada de un sistema.

Incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida; sin embargo, no proporciona información respecto a la estructura física del sistema (las funciones de transferencia de muchos sistemas físicos distintos pueden ser idénticas).

La relación entre la variable de salida y la de entrada de un sistema de control incluye con frecuencia términos dependientes del tiempo y toma la forma de ecuación diferencial, es decir, la función de transferencia contiene términos que representan velocidades de cambio.

El tratamiento de estas ecuaciones requiere unos conocimientos matemáticos que se salen de los objetivos de este tema; sin embargo, hay un método que simplifica y facilita el trabajo con funciones de transferencia de este tipo trabajando en el dominio de la transformada de Laplace.

38.1.2 Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una herramienta matemática que permite que una ecuación diferencial expresada en el dominio del tiempo *t*, se pueda expresar en el dominio de una nueva variable *s*, de forma que la función de transferencia quede en forma de un cociente de dos polinomios de dicha variable *s*.

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$$

La transformada de Laplace se define como:

$$L[y(t)] = \lim \int_0^{\infty} y(t)\, e^{-st} dt$$

Donde el operador *L[ ]* significa "transformada de Laplace de".

La variable *s* es una variable que pertenece al conjunto de los números complejos, $s = \delta + j\sigma$; donde δ y σ son números reales y $j = \sqrt{-1}$.

Por **ejemplo**, muchos sistemas físicos se pueden representar por la ecuación diferencial lineal de primer orden siguiente:

$$a_1 \cdot dc(t)/dt + a_0 \cdot c(t) = b_0 \cdot r(t)$$

Donde a_1, a_0 y b_0 son constantes, *r(t)* representa la señal de entrada y *c(t)* la señal de salida.

Si se aplica la transformada de Laplace (figura 38.5), suponiendo condiciones iniciales nulas, a la ecuación anterior, queda de la siguiente forma:

$$a_1 \cdot s \cdot C(s) + a_0 \cdot C(s) = b_0 \cdot R(s)$$

Si se expresa la ecuación anterior en forma de función de transferencia, es decir, el cociente entre la salida y la entrada, se obtiene una expresión de la siguiente forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{a_1 s + a_0}$$

Como se puede ver, la función de transferencia es mucho más sencilla y permite estudiar el comportamiento de un sistema de control de forma más simple.

38.1.3 Ecuación característica

De manera general, la función de transferencia de un sistema vendrá representada por una expresión de este tipo:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}$$

El denominador *D(s)* es conocido también con el nombre de **ecuación característica**, pues incluye, a través de los valores de sus coeficientes, todas las características físicas de los elementos que componen el sistema. Las raíces (valores para los cuales se hace cero la ecuación) determinan la estabilidad del sistema, así como la naturaleza de su respuesta para cualquier tipo de entrada. Un sistema lineal se dice que es estable cuando su respuesta a una entrada tiene valor finito (no tiende a infinito), una vez desaparecida la señal de entrada. Esto se puede comprobar estudiando los polos, es decir, valores para los que la función de transferencia se hace infinita; estos han de estar situados en el lado izquierdo del semiplano complejo de Laplace.

Función del tiempo	**Transformada**
δ(t): Delta de Dirac	1
u(t): escalón unitario	1/s
e^{-at}	$\frac{1}{(s+a)}$
$\frac{dy(t)}{dt}$	$s \cdot Y(s) - y(0^+)$
$\frac{d^n y(t)}{dt^n}$	$s^n \cdot Y(s) - s^{n-1} \cdot y(0^+) - s^{n-2} \cdot y^2(0^+) - \ldots - y^{n-1}(0^+)$
$\int_0^t y(t)$	$\frac{Y(s)}{s}$
$\int_0^t \ldots \left(\int_0^t \left(\int_o^t y(t)dt \right) dt \right) dt \ldots n\ veces$	$\frac{Y(s)}{s^n}$
$a \cdot t$	a/s^2
$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$sen\ \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$cos\ \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Figura 38.2. Transformadas de Laplace más comunes.

38.2 Análisis de sistemas de control en el dominio del tiempo: respuesta transitoria de sistemas de 1º y 2º orden; respuesta en régimen permanente

Para analizar el comportamiento de un sistema se necesita conocer su función de transferencia. La determinación de esta función se puede hacer de modo experimental a base de estudiar la respuesta del sistema a una entrada de función conocida y, a ser posible, sencilla y fácil de reproducir.

Teóricamente, cualquier entrada de función conocida sería aplicable, pero se suelen utilizar señales elementales normalizadas como el escalón y la rampa.

En la práctica, las señales que se analizan siempre son mucho más complejas, pero siempre será posible su aproximación y/o descomposición en señales elementales, con lo cual la respuesta será la suma de las respuestas ante estas funciones elementales de excitación.

El **análisis en función del tiempo** de los sistemas de control tiene como finalidad el estudio de las características de las respuestas en función del tiempo para cada una de las excitaciones elementales.

En el análisis de estas respuestas existen dos partes diferenciadas:

- **Régimen transitorio,** que corresponde al instante inmediatamente posterior a la aplicación de una señal de entrada.
- **Régimen permanente,** que corresponde al estudio de la respuesta después de haber transcurrido un tiempo suficientemente largo desde que se aplicó una señal de entrada.

38.2.1 Respuesta transitoria

En el régimen transitorio la señal de salida tratará de adecuarse a las exigencias de la entrada, tendiendo a hacer los más pequeño posible la diferencia o el error entre ambas señales.

Según el tipo de sistema, existe la posibilidad de que la señal de salida oscile en torno al valor de referencia, de forma amortiguada con el tiempo o no. Si las oscilaciones no se amortiguan, es decir, no desaparecen con el tiempo, el sistema será inestable y por consiguiente inservible. Si, por el contrario, las oscilaciones disminuyen con el tiempo o incluso desaparecen, el sistema será estable. Cuanto más pequeñas sean estas sobreoscilaciones, más estable será el sistema.

El análisis del régimen transitorio se suele realizar a partir de la respuesta que se obtiene de un sistema al excitarlo con una entrada del tipo escalón unitario, es decir, *r(t) = u(t).* Esta respuesta se denomina **indicial.**

La respuesta del sistema analizado se aproxima, en los sistemas de control más comunes, a la proporcionada por los sistemas de control más estudiados y conocidos, que son los sistemas de primer y segundo orden.

Respuesta transitoria de sistemas de primer orden

Se denominan sistemas de primer orden aquellos que tienen una función de transferencia del tipo:

$$F(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

La respuesta temporal del sistema de primer orden a una entrada escalón unitario es:

$$c(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Si la entrada en vez de ser un escalón unitario es un escalón de amplitud *M,* la respuesta es:

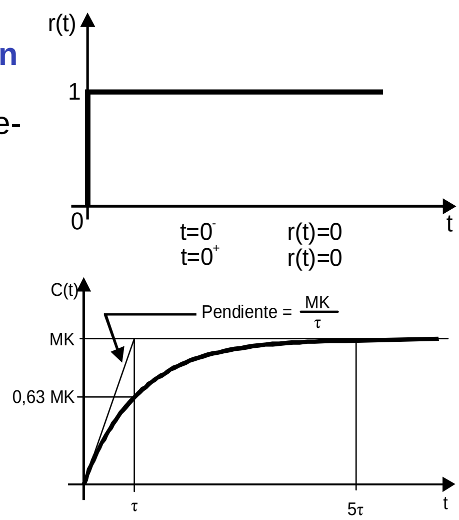

Figura 38.3

$$c(t) = MK\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

La representación gráfica de esta respuesta es la indicada en la figura 38.3.

La constante τ recibe el nombre de constante de tiempo del sistema, y representa el tiempo que tarda la respuesta en llegar al 63% del valor final. En teoría, la respuesta del sistema alcanza su valor final de régimen permanente cuando transcurre un tiempo infinito; sin embargo, en la práctica, la respuesta se considera que ha llegado al régimen permanente cuando ha transcurrido un tiempo de 5τ.

El valor hacia el que tiende la respuesta del sistema es la amplitud *M* del escalón de entrada multiplicada por la constante *K* del sistema, que recibe el nombre de ganancia estática. Esta relación permite obtener la ganancia estática *K* dividiendo el valor de la respuesta en régimen permanente entre la amplitud *M* del escalón de entrada.

Respuesta transitoria de sistemas de segundo orden

Se definen como sistemas de segundo orden aquellos que tienen una función de transferencia del siguiente tipo:

$$F(s) = \frac{K}{s^2 + ps + k}; \; que \;\; se \;\; representa \;\; habitualmente \;\; como:$$

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Donde: ζ es el coeficiente de amortiguamiento (sin unidades) y ω_n es la pulsación propia del sistema cuando el amortiguamiento es cero; se espresa en s^{-1}.

La respuesta transitoria de una gran cantidad de sistemas de control se puede aproximar con la de un sistema de segundo orden.

Si se aplica una entrada escalón unitario a un sistema de segundo orden, la respuesta puede ser de cuatro tipos según el valor del coeficiente de amortiguamiento (figura 38.4):

a) Sistema sin amortiguamiento *ζ = 0*

La respuesta es de tipo senoidal no amortiguada, con un valor máximo de salida igual al doble de la entrada. La frecuencia de la sinusoide es la frecuencia natural del sistema ω_n.

b) Sistema subamortiguado (*0 < ζ < 1*)

La respuesta del sistema es de tipo oscilatorio amortiguado. El valor final de la respuesta tiende hacia el valor de la señal de entrada.

c) Sistema con amortiguamiento crítico (*ζ = 1*)

La respuesta no oscila y es uniformemente creciente de forma exponencial. Su valor final tiende hacia el valor de la señal de entrada.

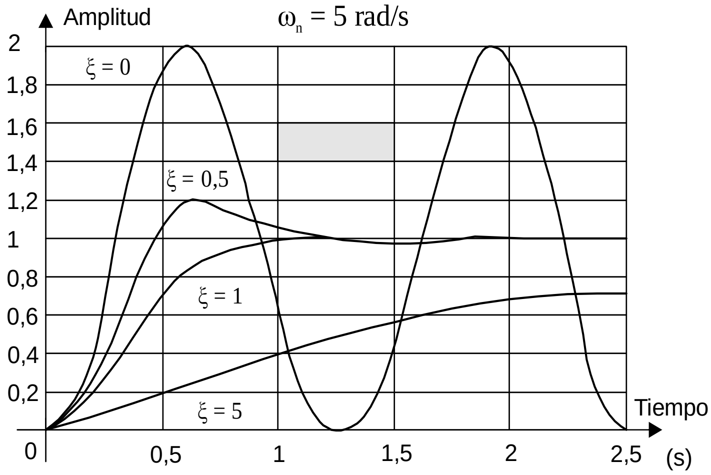

Figura 38.4

d) Sistema sobreamortiguado (*ζ > 1*)

La respuesta es uniformemente creciente de forma exponencial. La velocidad de crecimiento disminuye a medida que aumenta el coeficiente de amortiguamiento.

La respuesta de un sistema de segundo orden se especifica en función de la respuesta transitoria del mismo a una entrada escalón unitario, y en ella son característicos los parámetros indicados en la figura 38.5.

- Tiempo de retardo (t_d): Tiempo que tarda la respuesta en alcanzar por primera vez el 50 % del valor final.
- Tiempo de crecimiento (t_r): Tiempo requerido para que la respuesta crezca del 10 % al 90 % del valor final en sistemas sobreamortiguados, o bien, del 0% al 100 % del valor final en sistemas subamortiguados.
- Tiempo de pico (t_p): Es el tiempo requerido por la respuesta para alcanzar el primer pico del sobreimpulso.
- Máximo sobreimpulso (M_p): Valor de pico máximo de la respuesta, medido con respecto al valor final de la respuesta y expresado en forma de porcentaje. Si el valor final estabilizado de la respuesta difiere de la unidad, se utiliza el máximo sobreimpulso porcentual que se expresa de la siguiente forma:

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \cdot 100$$

- Tiempo de establecimiento (t_s). Tiempo requerido por la respuesta para alcanzar y mantenerse dentro de determinado margen alrededor del valor final (habitualmente ±2 %).

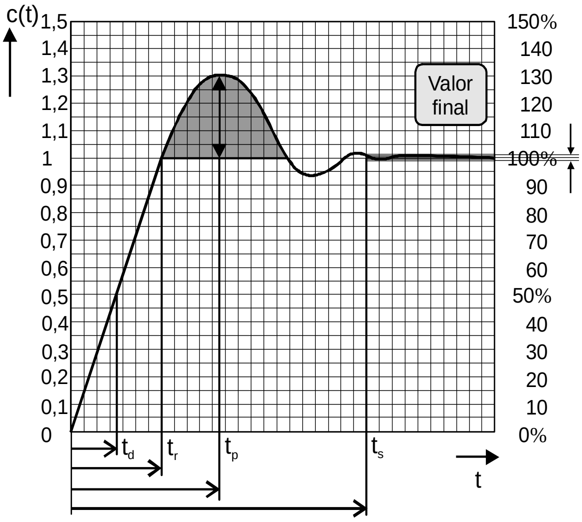

Figura 38.5

Estas especificaciones están relacionadas con la frecuencia natural, ω_n, y el amortiguamiento, ζ, mediante las expresiones:

$$M_p = e^{-\frac{\zeta \cdot \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

De estas dos expresiones se pueden deducir dos fórmulas prácticas que permiten obtener la función de transferencia de un sistema de 2º orden a partir se las especificaciones de M_p y t_p medidas en su respuesta indicial:

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\zeta = \left| \frac{LM_p}{\sqrt{\pi^2 + (LM_p)^2}} \right|$$

38.2.2 Respuesta en régimen permanente

En el régimen permanente la salida se estabiliza a una determinada distancia (error) de la señal de entrada. Interesa estudiar fundamentalmente el error permanente entre la salida y el valor exigido por la entrada.

Para el estudio del régimen permanente de un sistema de control se utilizan las señales de entrada normalizadas: escalón y rampa. Estas señales se introducen en el sistema para observar la respuesta del mismo.

La respuesta de un sistema en régimen permanente a cada una de estas señales puede ser una respuesta que siga a la señal de entrada de manera exacta o con un error. Determinar esta respuesta, conocida también como precisión de un sistema, es el objetivo fundamental del análisis en régimen permanente.

Para el estudio del error en régimen permanente existe toda una teoría matemática establecida que, partiendo del conocimiento de la función de transferencia del trayecto directo del sistema *G(s)* y considerando realimentación unitaria, permite una rápida caracterización de esta parte de la respuesta temporal.

Se define la función de transferencia en lazo abierto de un sistema de control como el cociente entre la salida del lazo de realimentación *C(s)* y la señal de error *E(s)*. En un sistema con realimentación unitaria:

$$\frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$$

A partir de la función de transferencia en lazo abierto y en función del tipo de respuesta que puedan dar, los sistemas de control se pueden clasificar como sistemas de tipo 0, 1, 2, 3, …, según el número de integraciones netas que existan en dicha función de transferencia *G(s).*

El número de integraciones netas se determina a partir del denominador de *G(s)* que tiene la forma general:

$$G(s) = \frac{K_n(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)...}{s^n(1+\tau_a s)(1+\tau_b s)..}$$

El grado *n* del término que aparece en el denominador determina el tipo de sistema; de acuerdo con este valor los sistemas tienen las siguientes características de respuesta en régimen permanente:

- Tipo 0: Una señal activa constante da un valor constante de la variable controlada. Con una función escalón de entrada se produce una salida de valor constante, con señal de error también constante. Con una entrada en rampa, la salida es una rampa de menor pendiente que la de entrada, pero la señal de error crece con el tiempo, por lo que un sistema de tipo 0 no puede seguir a una señal en rampa.
- Tipo 1: Una señal activa constante produce un cambio constante (velocidad constante) de la variable controlada. En el caso de que la entrada sea un escalón, el error es nulo y la salida sigue a la entrada; en caso de que la entrada sea una rampa, el error e constante e inversamente proporcional a la ganancia K.
- Tipo2: Una señal activa constante produce una segunda derivada de la variable controlada que es constante (aceleración constante). Ante una entrada escalón y ante una entrada en rampa, en régimen permanente la salida sigue a la entrada y el error es nulo.
- Tipo 3: Una señal activa constante produce un cambio constante de la aceleración de la variable controlada.

38.3 Análisis de sistemas de control en el dominio de la frecuencia: respuesta en frecuencia; estudio de la estabilidad mediante el diagrama de Bode

38.3.1 Respuesta en frecuencia

En el apartado anterior se analizó la respuesta del sistema cuando las entradas son de tipo escalón, impulso y rampa, aquí se trata de analizar la respuesta del sistema ante entradas sinusoidales. Aunque no es frecuente encontrara señales sinusoidales en los sistemas de control, la información que proporciona este estudio resulta muy útil para el diseño y el análisis de los sistemas.

Respuesta en frecuencia de un sistema de 1^er orden

La función de transferencia de un sistema de 1^er orden es: $G(s)=\dfrac{1}{1+\tau s}$

Donde *τ* es la constante de tiempo del sistema. La función de respuesta en frecuencia, *G(jω)* se obtiene sustituyendo *s* por *jω*. Entonces:

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega\tau}$$

Para expresar esta ecuación en forma más adecuada, el numerador y el denominador se multiplican por *(1-jωτ)*:

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega\tau}x\frac{1-j\omega\tau}{1-j\omega\tau}=\frac{1-j\omega\tau}{1-j^2\omega^2\tau^2}$$

Pero $j^2 = -1$, por lo tanto: $G(j\omega)=\dfrac{1}{1+\omega^2\tau^2}-j\dfrac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}$

El móduo de esta función |*G(jω)*| es:

$$|G(j\omega)|=\sqrt{\left(\frac{1}{1+\omega^2\tau^2}\right)^2+\left(\frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

|*G(jω)*| indica cuánto es mayor o menor la amplitud de la salida respecto de la amplitud de la entrada. En general, se le denomina magnitud o ganancia. La diferencia de fase, φ, entre el fasor de salida y el fasor de entrada es:

$$\tan\varphi=-\omega\tau$$

El signo negativo indica que el fasor de salida precede al fasor de entrada por ese ángulo.

Respuesta en frecuencia de un sistema de 2º orden

La función de transferencia de un sistema de segundo orden es la siguiente:

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

Donde ω_n es la frecuencia angular natural y ζ el factor de amortiguamiento. Para obtener la función en respuesta a la frecuencia, se reemplaza *s* por *jω.* Es decir:

$$G(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{-\omega^2+j2\zeta\omega\omega_n+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2}{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)+j2\zeta\omega\omega_n}=\frac{1}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]+j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

Multiplicando por el conjugado del denominador: $\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]-j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$

Se obtiene: $G(j\omega)=\dfrac{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]-j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}$

El módulo de la expresión anterior es:

$$\left|G(j\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}}$$

La diferencia de fase, φ, entre la entrada y la salida está dada por:

$$\tan\varphi=-\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

El signo menos indica que la salida está retrasada respecto de la entrada.

38.3.2 Diagrama de Bode

La respuesta en frecuencia de un sistema proporciona la variación de la magnitud, |*G(jω)*| y la fase *φ* cuando la señal de entrada varía en un intervalo de frecuencia. Esto se representa mediante dos gráficas en función de la pulsación, ω, o de la frecuencia, f, (*ω = 2πf*), empleando escalas logarítmicas que se denominan gráficas de Bode.

La magnitud se expresa en decibelios*: |G(jω)| en dB = 20 log |G(jω)|*

Gráficas de Bode para un sistema de 1er orden

El módulo de la ganancia en frecuencia para un sistema de 1er orden es:

$\left|G(j\omega)\right|=\dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$ que expresado en decibelios es:

$$20\log\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

Si $\omega<<1/\tau$, entonces $\omega^2\tau^2$ es despreciable frente a 1, por lo que la magnitud es *20 log 1 = 0*. Por tanto a frecuencias bajas la gráfica de la magnitud es una línea recta de valor 0.

Si *ω>>1/τ*, entonces $\omega^2\tau^2$ es mucho mayor que 1, por lo que este valor puede ser despreciado y la magnitud es *20 log 1/ωτ = - 20 log ωτ,* que gráficamente representa una línea recta con pendiente de -20 dB por década (cuando *ω* se multiplica por 10, la respuesta cae 20 dB), la cual intersecta con la línea 0 dB cuando *ωτ =1*.

Este punto de intersección se llama **frecuencia de corte** y es: *ω=1/τ*.

Las líneas que se trazan en el diagrama de Bode (figura 38.6) son una representación asintótica de la gráfica real; esta se localiza alrededor de las dos líneas de manera que la máxima diferencia entre la representación asintótica y la gráfica real es como máximo de 3 dB en el punto de intersección de las dos asíntotas. En la frecuencia de corte, la respuesta cae 3 dB respecto al valor máximo.

En cuanto a la fase, en un sistema de 1[er] orden está dada por *tanφ = - ωτ*. A frecuencias bajas, la fase se puede aproximar a 0º. A frecuencias muy altas, la frecuencia se puede aproximar a -90º. Entre esos dos extremos el diagrama de Bode considera que el ángulo de fase varía linealmente. Se demuestra que el ángulo de fase para la frecuencia de corte es: *φ=-45º*.

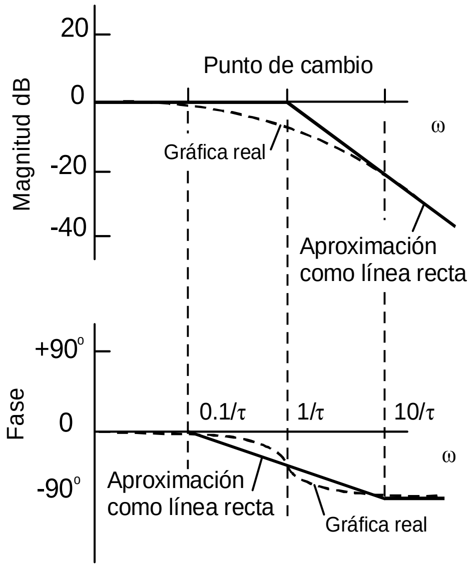

Figura 38.6

Gráficas de Bode para un sistema de 2º orden

El módulo de la ganacia en frecuencia para un sistema de 2º orden expresado en dB es:

$$\left|G(j\omega)\right|(dB) = 20\log\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}} = -20\log\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}$$

Si *(ω/ω_n)<<1*, entonces la magnitud es, aproximadamente, *-20 log 1 = 0 dB*.

Si *(ω/ω_n)>>1*, entonces la magnitud es, aproximadamente, *$-20\log(\omega/\omega_n)^2 = -40\log(\omega/\omega_n)$*. Es decir, cuando *ω* aumenta en un factor de 10, la magnitud cae 40 dB.

De esta manera a frecuencias bajas en el diagrama de Bode se traza una línea recta a 0 dB, en tanto que a frecuencias altas es una línea recta de pendiente -40 dB/década. La intersección de estas dos rectas está en $\omega=\omega_n$.

El valor real de la respuesta depende del coeficiente de amortiguamiento ζ; en la figura 38.7 se representan las gráficas reales para diversos coeficientes de amortiguamiento.

En cuanto a la fase está dada por la fórmula:

$$\tan\varphi = -\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Si *$(\omega/\omega_n)<<1$*, entonces *$\tan\varphi \approx 0$* y, por tanto, *$\varphi=0^o$*.

Si *$(\omega/\omega_n)>>1$*, entonces *$\tan\varphi \approx -1/(-\infty)$* y, por tanto, *$\varphi=-180^o$*.

Si *$\omega=\omega_n$*, entonces *$\tan\varphi \approx -\infty$* y, por tanto, *$\varphi=-90^o$*.

Para las frecuencias medias, en el diagrama de Bode se hace una aproximación a una línea recta como muestra la figura 38.7.

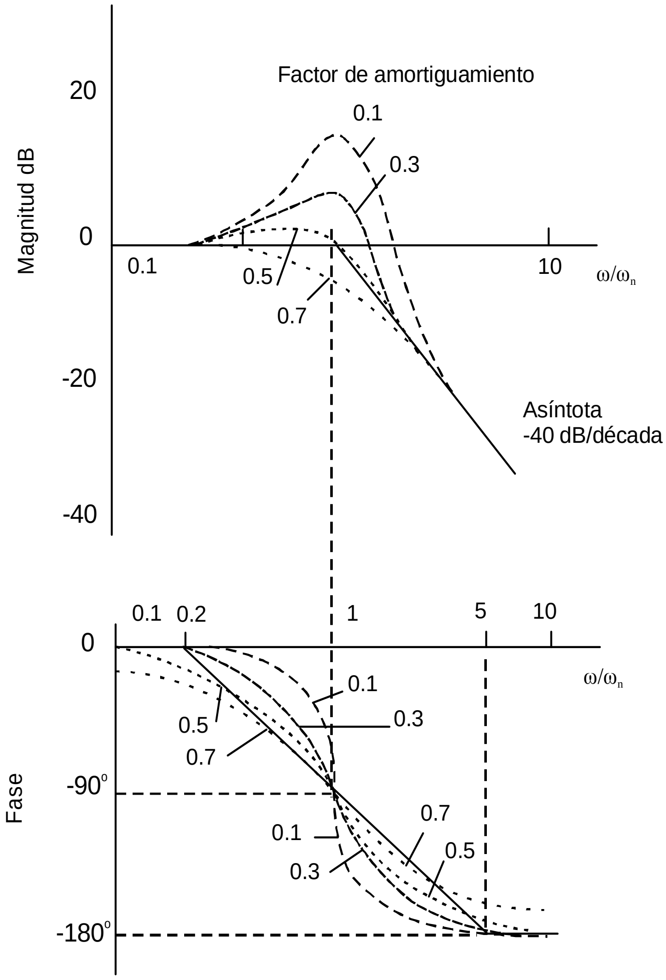

Figura 38.7

Estudio de la estabilidad

En un sistema de control de lazo cerrado como el represenado en la figura 38.8, para que se produzcan oscilaciones automantenidas es necesario que la función de respuesta en frecuencia del sistema tenga una magnitud de 1 y una fase de -180º. El sistema por el que pasa la señal es G(s) en serie con H(s).

Si la magnitud que resulta del sistema G(s) en serie con H(s) es menor que 1 y la fase es -180º, se producen oscilaciones amortiguadas.

Si la magnitud que resulta del sistema G(s) en serie con H(s) es mayor que 1 y la fase es -180º, se producen oscilaciones con amplitud cada vez mayor y, por tanto, el sistema es inestable.

Es decir, para que un sistema de control sea estable es necesario, en general, que la magnitud de G(s)H(s) sea de manera significativa menor que 1 (típicamente entre 0,4 y 0,5); si los valores de fase se encuentran entre -115º y -125º se produce un sistema de control poco subamortiguado.

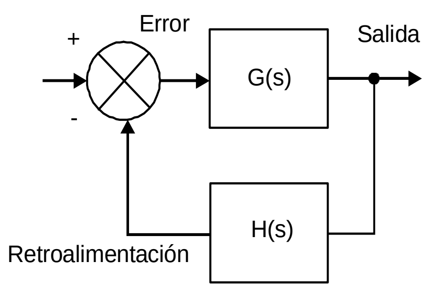

Figura 38.8

Siempre es interesante saber cuán estable es un sistema de control y si no tiene probabilidad de oscilar cuando se presentan pequeñas perturbaciones.

El término margen de ganancia se aplica al factor por el que hay que multiplicar la relación de la magnitud cuando la fase es -180º para que tenga el valor 1 y produzca inestabilidad.

El término margen de fase se refiere al valor en grados que el ángulo de fase es menosr que -180º cuando la magnitud es 1.

Las reglas antes consideraradas para un apropiao sistema de control estable, significan un margen de ganancia entre 2 y 2,5, y un margen de fase entre 45º y 65º.